Kara Harp Okulu Bilim Dergisi
Science Journal of Turkish Military Academy
Aralık / December 2017, Cilt/Volume 27, Sayı/Issue 2, 157-166.
ISSN (Basılı) : 1302-2741 ISSN (Online): 2148-4945

4x4 TİPİNDE MATRİSLERİN DETERMİNANTLARINI HESAPLAMADA ALTERNATİF BİR YÖNTEM

Selim MALTEPELER[1]

Öz

Bu çalışmada 4. mertebeden determinantların hesaplanmasında kullanılabilecek alternatif bir yöntemin geliştirilmesi amaçlanmıştır. Bu amaç doğrultusunda; Laplace ve Chio açılımları gibi genel determinant hesaplama yöntemlerinden farklı olarak, 3. mertebe determinantların hesaplanmasında kullanılan Sarrus kuralına benzer bir yöntemin oluşturulmasına çalışılmıştır. Bu kapsamda 4x4 tipinde genel bir matrisin determinantı Laplace açılımı ile hesaplanmış ve aynı determinant değerini hesaplayabilen yeni bir yöntem geliştirilmiştir. Geliştirilen yöntem dört aşamadan oluşmaktadır. İlk üç aşamada bir takım sütun değişiklikleri ile birlikte bazı satırlar tekrar yazılarak ilgili çapraz çarpımlar yapılıp belirtilen işaretler alınarak toplanır. Dördüncü aşamada ise, ilk üç aşamada elde edilen toplamlar toplanır ve matrisin determinantı elde edilir. Söz konusu yöntem Sarrus kuralına benzer çapraz çarpımlar içeren bir yöntemdir.

Anahtar kelimeler: *Determinant, 4x4 matrislerin determinant hesabı, Sarrus kuralı, Laplace açılımı.*

An Alternative Method for Calculating Determinants of 4x4 Type Matrices

Abstract

In this study, it is aimed to develop an alternative method which can be used in the calculation of determinant of 4th order. In accordance with this purpose; Unlike general determinant calculation methods such as Laplace and Chio expansions, it is tried to create a method similar to the Sarrus rule used for the calculation of the third order determinants. In this

[1] Milli Savunma Üniversitesi, Kara Harp Okulu, smaltepeler@kho.edu.tr ORCID: 0000-0003-1396-918X

context, determinant of a 4x4 general matrix is calculated by Laplace expansion and a new method is developed to calculate the same determinant value. This method is developed in four steps. In the first three steps, some of the lines are rewritten with some column changes, the related cross products are made, and the specified marks are taken and added. In the fourth stage, the sums obtained in the first three steps are summed and the determinant of the matrix is obtained. In other words, this method is a method involving cross-products similar to Sarrus' rule.

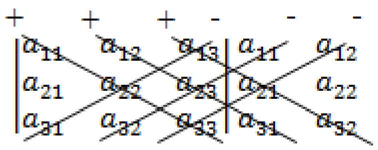
Key words : *Determinant, Determinant of 4x4 matrices, Sarrus rule, Laplace expansions.*

GİRİŞ

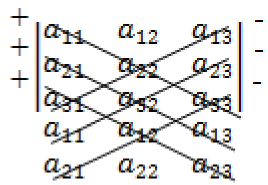
Determinantlar matematikte lineer cebirin bir konusu olmakla birlikte, gerek mühendislik gerekse fen bilimlerinde yaygın olarak uygulama alanı bulabilmektedir. Bilinmeyen sayısı ile denklem sayısının birbirine eşit olduğu karesel lineer denklem sistemlerinin çözüm kümelerinin bulunmasını sağlayan ve Cramer Yöntemi olarak adlandırılan yöntem determinant hesabını içermektedir (Sabuncuoğlu, 2008). $\mathcal{R}^3$ vektör uzayında iki vektörün vektörel çarpımı ile üç vektörün karma çarpımı determinant ile hesaplanabilmekte ve bu determinant değerleri sırasıyla, söz konusu vektörlerin belirlediği paralelkenarın alanı ile paralel yüzlünün hacmine karşılık gelmektedir (Lipschutz ve Lipson, 2009). Ayrıca çeşitli mühendislik alanlarında önemli bir yeri olan öz değer problemlerinin çözümü de determinantların uygulama alanlarındandır (Argün, Arıkan, Bulut, Halıcıoğlu, 2014).

Determinant kavramını en basit şekliyle, nxn tipinde bir karesel matrisi bir reel sayı ile eşleştirme olarak tanımlayabiliriz. Kavramın formal tanımı ise şu şekilde verilebilir. $\mathcal{R}$ birimli ve değişmeli bir halka, n bir pozitif tamsayı olsun. O zaman her $A = [a_{ij}] \in \mathcal{R}^{nxn}$ için $det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} (sgn\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)}$ şeklinde tanımlı $det: \mathcal{R}^{nxn} \to \mathcal{R}$ fonksiyonuna determinant fonksiyonu ve $det(A)$ ya A matrisinin determinantı denir (Argün vd., 2014). Mertebe n büyüdükçe bir determinantı yukarıda verilen formal tanıma göre hesaplamak oldukça zahmetli bir iştir (Sabuncuoğlu, 2008). Mertebe $n = 1$ ve $n = 2$ için determinant hesabı sırasıyla; $det(A) = |a_{11}| = a_{11}$ ve $det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$ olup kolaydır. $n = 3$ için ise bir takım pratik yöntemler mevcuttur. Yapılan literatür taramasında $n = 3$ için Sarrus kuralı, Üçgen kuralı, Dodgson yöntemi, Chio açılımı ve Hajrizaj yöntemi gibi pratik yöntemlerle karşılaşılmıştır

(Ahmed ve Bondar, 2014; Hazrizaj, 2009). Bu yöntemlerden en yaygın olanı Sarrus kuralıdır. Sarrus kuralına göre 3. mertebeden bir determinant hesaplanırken Şekil 1 de görüldüğü üzere; ilk iki sütun üçüncü sütunun sağına yazılarak çizgiler üzerindeki terimler çarpılır ve ilgili işaret alınarak toplanır (Eves, 1980). Buna göre; $det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$ olarak bulunur. Benzer şekilde ilk iki satır üçüncü satırın altına yazılarak da Şekil 2 de görüldüğü gibi determinant hesaplanabilir.



Şekil 1. Sarrus Kuralı



Şekil 2. Sarrus Kuralı

Ancak mertebe $n \geq 4$ olduğu durumlarda determinant hesabı için pratik yöntemler söz konusu değildir (Argün vd., 2014). Bu nedenle Laplace açılımı olarak adlandırılan genel bir hesaplama yöntemi kullanılmaktadır. Bu yönteme göre bir $A = [a_{ij}] \in \mathcal{R}^{nxn}$ matrisinin determinantı, herhangi bir satır veya herhangi bir sütunun elemanları ile bu elemanlara ait kofaktörlerin çarpımlarının toplamlarına eşittir (Lipschutz ve Lipson, 2009). Yani; $det(A) = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$ veya $det(A) = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$ dir. Laplace açılımı gibi determinantlar için benzer bir genel hesaplama yöntemi de Chio açılımıdır. Bu yöntem hesaplanacak determinantın her bir adımda bir mertebe indirgenmesini içermektedir (Eves, 1980). Buna göre bir $A = [a_{ij}] \in \mathcal{R}^{nxn}$ matrisinin determinantı;

$$det(A) = \frac{1}{{a_{11}}^{n-2}} \begin{Vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{2n} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{31} & a_{3n} \end{vmatrix} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{n1} & a_{n2} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{n1} & a_{n3} \end{vmatrix} & \cdots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{n1} & a_{nn} \end{vmatrix} \end{Vmatrix}$$

ile hesaplanır.

Dodgson ve Chio yöntemini temel alan bir başka yöntemde ise, $n.$ mertebeden $|A|$ determinantında; $(n-2).$ mertebeden iç determinant $|B|$ ve $|A|$ determinantını oluşturan $(n-1).$ mertebeden determinantlar $|C|$, $|D|$, $|E|$, $|F|$ olmak üzere, $det(A) = \frac{1}{|B|} \cdot \begin{vmatrix} |C| & |D| \\ |E| & |F| \end{vmatrix}$, $|B| \neq 0$ olarak hesaplanır (Salihu, 2012).

Mertebesi $n \geq 4$ olan determinantların hesaplanmasında pratik yöntemlerin olmayışı, söz konusu determinantların hesaplanması için "Sarrus kuralına benzer yeni bir yöntem geliştirilebilir mi?" sorusunu akla getirmektedir.

AMAÇ

Bu çalışmada 4. mertebeden determinantların hesaplanmasında kullanılabilecek alternatif bir yöntemin geliştirilmesi amaçlanmıştır. Bu amaç doğrultusunda; Laplace ve Chio açılımları gibi genel determinant hesaplama yöntemlerinden farklı olarak, 3. mertebe determinantların hesaplanmasında kullanılan Sarrus kuralına benzer bir yöntemin oluşturulmasına çalışılmıştır.

YÖNTEM

Öncelikle 4x4 tipinde genel bir $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{bmatrix}$ matrisi alınarak determinantı Laplace açılımı ile hesaplanmıştır. Laplace açılımı 1. satıra göre uygulandığında;

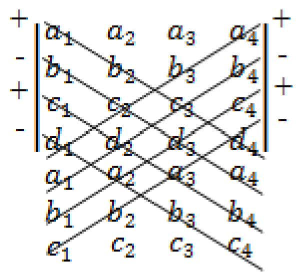
$$\begin{aligned} det(A) = {} & a_1b_2c_3d_4 + a_1b_4c_2d_3 + a_1b_3c_4d_2 + a_2b_4c_3d_1 + a_2b_1c_4d_3 + \\ & a_2b_3c_1d_4 + a_3b_1c_2d_4 + a_3b_4c_1d_2 + a_3b_2c_4d_1 + a_4b_3c_2d_1 + \\ & a_4b_1c_3d_2 + a_4b_2c_1d_3 - a_1b_4c_3d_2 - a_1b_2c_4d_3 - a_1b_3c_2d_4 - \\ & a_2b_1c_3d_4 - a_2b_4c_1d_3 - a_2b_3c_4d_1 - a_3b_4c_2d_1 - a_3b_1c_4d_2 - \\ & a_3b_2c_1d_4 - a_4b_1c_2d_3 - a_4b_3c_1d_2 - a_4b_2c_3d_1 \end{aligned}$$

bulunmuştur. $det(A)$ değerinin $\{1,2,3,4\}$ kümesi üzerinde tanımlanan tüm permütasyonların sayısı olan $4! = 24$ adet dörtlü çarpımın toplam veya farkından oluştuğu gözlemlenmiştir. Söz konusu 24 adet dörtlü çarpımı elde edebilmek için Sarrus kuralına benzer şekilde, A matrisinin ilk üç satırı dördüncü satırın altına yazılarak çapraz çarpımlar yapılmış ve uygun işaretler verilerek 24 adet dörtlü çarpımdan 8 adedi elde edilmiştir. Geriye kalan 16 adet dörtlü çarpımı elde edebilmek için A matrisinde önce 2. ve 3. sütunların sonra da 3. ve 4. sütunların yerleri karşılıklı olarak değiştirilmiş ve her sütun değişiminin ardından ilk üç satırın dördüncü satırın altına yazılarak çapraz çarpımlarının yapılması işlemi tekrarlanmıştır. Elde edilen tüm dörtlü çarpımların toplamının, Laplace açılımı ile hesaplanan $det(A)$ değerine eşit olduğu doğrudan ispat yöntemi ile gösterilmiştir.

BULGULAR

İlk Üç Satırın Dördüncü Satırın Altına Yazılması

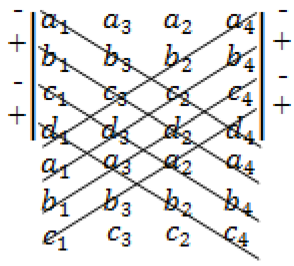
A matrisinin ilk üç satırı dördüncü satırın altına yazılarak Şekil 3 de gösterilen çapraz çarpımlar yapılıp belirtilen işaretler alındığında elde edilen dörtlü çarpımların toplamı D_1 olsun. Bu durumda $D_1 = a_1b_2c_3d_4 + a_3b_4c_1d_2 + a_4b_3c_2d_1 + a_2b_1c_4d_3 - a_4b_1c_2d_3 - a_2b_3c_4d_1 - a_1b_4c_3d_2 - a_3b_2c_1d_4$ olarak bulunur.



Şekil 3. İlk Üç Satırın Dördüncü Satırın Altına Yazılması

İkinci ve Üçüncü Sütunların Yer Değiştirmesi

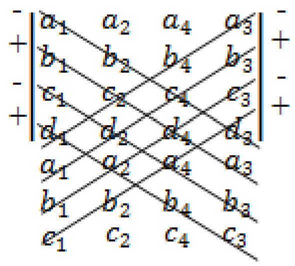
A matrisinde 2. ve 3. sütunların yerleri karşılıklı olarak değiştirildikten sonra ilk üç satır dördüncü satırın altına yazılarak Şekil 4 de gösterilen çapraz çarpımlar yapılıp belirtilen işaretler alındığında elde edilen dörtlü çarpımların toplamı D_2 olsun. Bu durumda $D_2 = a_4b_1c_3d_2 + a_3b_2c_4d_1 + a_1b_4c_2d_3 + a_2b_3c_1d_4 - a_1b_3c_2d_4 - a_2b_4c_1d_3 - a_4b_2c_3d_1 - a_3b_1c_4d_2$ olarak bulunur.



Şekil 4. İkinci ve Üçüncü Sütunların Yer Değiştirmesi

Üçüncü ve Dördüncü Sütunların Yer Değiştirmesi

A matrisinde 3. ve 4. sütunların yerleri karşılıklı olarak değiştirildikten sonra ilk üç satır dördüncü satırın altına yazılarak Şekil 5 de gösterilen çapraz çarpımlar yapılıp belirtilen işaretler alındığında elde edilen dörtlü çarpımların toplamı D_3 olsun. Bu durumda $D_3 = a_3b_1c_2d_4 + a_2b_4c_3d_1 + a_1b_3c_4d_2 + a_4b_2c_1d_3 - a_1b_2c_4d_3 - a_4b_3c_1d_2 - a_3b_4c_2d_1 - a_2b_1c_3d_4$ olarak bulunur.



Şekil 5. Üçüncü ve Dördüncü Sütunların Yer Değiştirmesi

Elde Edilen Dörtlü Çarpımların Toplanması

Şekil 3, Şekil 4 ve Şekil 5 ile elde edilen D_1, D_2 ve D_3 değerlerini topladığımızda;

$$\begin{aligned} D_1 + D_2 + D_3 = {} & a_1b_2c_3d_4 + a_1b_4c_2d_3 + a_1b_3c_4d_2 + a_2b_4c_3d_1 + \\ & a_2b_1c_4d_3 + a_2b_3c_1d_4 + a_3b_1c_2d_4 + a_3b_4c_1d_2 + \\ & a_3b_2c_4d_1 + a_4b_3c_2d_1 + a_4b_1c_3d_2 + a_4b_2c_1d_3 - \\ & a_1b_4c_3d_2 - a_1b_2c_4d_3 - a_1b_3c_2d_4 - a_2b_1c_3d_4 - \end{aligned}$$

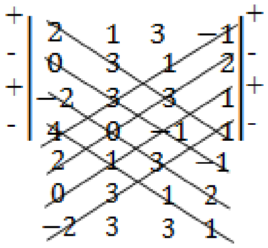
$$a_2b_4c_1d_3 - a_2b_3c_4d_1 - a_3b_4c_2d_1 - a_3b_1c_4d_2 -$$
$$a_3b_2c_1d_4 - a_4b_1c_2d_3 - a_4b_3c_1d_2 - a_4b_2c_3d_1$$

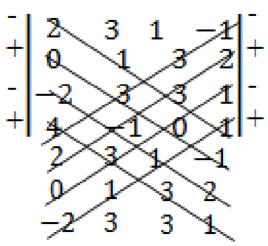
değeri bulunur. Elde edilen bu değer ile Yöntem bölümünde Laplace açılımı ile elde edilen $det(A)$ değeri karşılaştırıldığında $det(A) = D_1 + D_2 + D_3$ olduğu görülür.

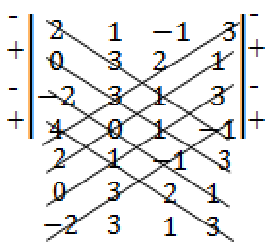
SONUÇ VE TARTIŞMA

4x4 tipindeki karesel matrislerin determinantlarının hesaplanmasında kullanılabilecek alternatif bir yöntemin geliştirilmesinin amaçlandığı bu çalışmada; genel determinant hesaplama yöntemlerinden farklı olarak, üçüncü mertebe determinantların hesaplanmasında kullanılan Sarrus kuralına benzer bir yöntemin oluşturulmasına çalışılmıştır. Bu kapsamda geliştirilen yöntem dört aşamadan oluşmaktadır. Birinci aşamada; determinantı hesaplanacak olan A matrisinin ilk üç satırı dördüncü satırın altına yazıldıktan sonra Şekil 3 de görülen çapraz çarpımlar yapılıp belirtilen işaretler alınarak toplanır. İkinci aşamada; A matrisinin ikinci ve üçüncü sütunları karşılıklı olarak değiştirildikten ve ilk üç satır dördüncü satırın altına yazıldıktan sonra Şekil 4 de görülen çapraz çarpımlar yapılıp belirtilen işaretler alınarak toplanır. Üçüncü aşamada; A matrisinin üçüncü ve dördüncü sütunları karşılıklı olarak değiştirildikten ve ilk üç satır dördüncü satırın altına yazıldıktan sonra Şekil 5 de görülen çapraz çarpımlar yapılıp belirtilen işaretler alınarak toplanır. Dördüncü aşamada ise, ilk üç aşamada elde edilen toplamlar toplanır ve sonuç olarak A matrisinin determinantı hesaplanmış olur. Elde ettiğimiz yöntemimizin bir uygulaması aşağıda verilmiştir:

Örnek olarak $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ matrisini alalım. A matrisinin determinantı Laplace açılımı ile hesaplandığında $det(A) = 20$ olarak bulunur. Aynı matrisin determinantını geliştirdiğimiz yöntemimiz ile hesaplamak istediğimizde; Şekil 6, Şekil 7 ve Şekil 8 de görülen birinci, ikinci ve üçüncü aşamalara ait çapraz çarpımları yapar ve toplarsak,







Şekil 6. Birinci Aşama **Şekil 7.** İkinci Aşama **Şekil 8.** Üçüncü Aşama

$$D_1 = 2.3.3.1 - 0.3.(-1).(-1) + (-2).0.3.2 - 4.1.1.1 + (-1).1.3.4 - 2.3.0.2 + 1.(-1).1.0 - 1.3.3.(-2) = 18 - 4 - 12 + 18 = 20$$

$$D_2 = -2.1.3.1 + 0.3.0.(-1) - (-2).(-1).1.2 + 4.3.3.1 - (-1).3.3.4 + 2.3.(-1).2 - 1.0.3.0 + 1.1.1.(-2) = -6 - 4 + 36 + 36 - 12 - 2 = 48$$

$$D_3 = -2.3.1.(-1) + 0.3.1.3 - (-2).0.(-1).1 + 4.1.2.3 - 3.2.3.4 + 1.1.0.2 - 3.1.1.0 + (-1).(-1).3.(-2) = 6 + 24 - 72 - 6 = -48$$

$det(A) = D_1 + D_2 + D_3 = 20 + 48 - 48 = 20$ olarak elde edilir ve bu değerin A matrisinin Laplace açılımı ile hesaplanan determinant değeri ile aynı olduğu görülür.

Verilen örnek uygulamada da görüldüğü üzere, çalışmanın amacı doğrultusunda geliştirilen yöntemin Sarrus kuralına benzediği ve Sarrus kuralı ile yapılan çapraz çarpımların benzer şekilde üç kez uygulandığı görülmektedir.

Geliştirilen yöntemde, Laplace açılımında olduğu gibi kofaktörlerin hesaplanmasına veya Chio açılımında olduğu gibi daha düşük mertebeden determinantların hesaplanmasına ihtiyaç yoktur.

ÖNERİLER

Çalışmanın amacı doğrultusunda 4. mertebe determinantların hesaplanması için geliştirilmiş olan bu yöntemin daha büyük mertebeden determinantların hesaplanmasında kullanılabilirliği araştırılabilir ve Laplace açılımı gibi genel bir determinant hesaplama yöntemi olup olamayacağı gösterilebilir.

KAYNAKÇA

Ahmed, A., A., M., Bondar, K., L. (2014). Modern Method to Compute the Determinants of Matrices of Order 3, *Journal of Informatics and Mathematical Sciences,* 6(2), 55-60.

Argün, Z., Arıkan, A., Bulut, S., Halıcıoğlu, S. (2014). *Temel Matematik Kavramların Künyesi*, Gazi Kitabevi, Ankara.

Eves, H. (1980). *Elementary Matrix Theory,* Dover Publications, New York.

Hazrizaj, D. (2009). New Method to Compute the Determinant of a 3x3 Matrix, *International Journal of Algebra*, 3(5), 211-219.

Lipschutz, S., Lipson, M. (2009). *Schaum's Outline of Linear Algebra,* McGraw-Hill, New York.

Sabuncuoğlu, A. (2008). *Lineer Cebir*, Nobel Yayın Dağıtım, Ankara.

Salihu, A. (2012). New Method to Calculate Determinants of nxn $(n \geq 3)$ Matrix, by Reducing Determinants to 2nd Order. *International Journal of Algebra,* 6(19), 913-917.

EXTENDED SUMMARY

An Alternative Method for Calculating Determinants of 4x4 Type Matrices

In this study, it is aimed to develop an alternative method which can be used in the calculation of determinant of 4th order. In accordance with this purpose; Unlike general determinant calculation methods such as Laplace and Chio expansions, it is tried to create a method similar to the Sarrus rule used for the calculation of the third order determinants.

Primarily, its determinant is calculated with Laplace expansion taking a 4x4 general

$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{bmatrix}$ matrix. When Laplace expansion is applied according to first line;

$$\begin{aligned} det(A) = {} & a_1b_2c_3d_4 + a_1b_4c_2d_3 + a_1b_3c_4d_2 + a_2b_4c_3d_1 + a_2b_1c_4d_3 + \\ & a_2b_3c_1d_4 + a_3b_1c_2d_4 + a_3b_4c_1d_2 + a_3b_2c_4d_1 + a_4b_3c_2d_1 + \\ & a_4b_1c_3d_2 + a_4b_2c_1d_3 - a_1b_4c_3d_2 - a_1b_2c_4d_3 - a_1b_3c_2d_4 - \\ & a_2b_1c_3d_4 - a_2b_4c_1d_3 - a_2b_3c_4d_1 - a_3b_4c_2d_1 - a_3b_1c_4d_2 - \\ & a_3b_2c_1d_4 - a_4b_1c_2d_3 - a_4b_3c_1d_2 - a_4b_2c_3d_1 \end{aligned}$$

is found. It is observed that $det(A)$ value is formed by quadruple multiplication aggregate or difference of $4! = 24$ which is the number of all permutations and defined upon $\{1,2,3,4\}$ cluster. Similar to Sarrus rule, the question to obtain 24 times quadruple multiplication , cross muplications are made by writing down the first three line of A matrix below the fourth line and 8 of 24 times quadruple multiplication is obtained by giving appropriate marks. To obtain the remaining 16 times quadruple multiplication ,in A matrix, first ;the location of 2nd and 3rd columns then the location of 3rd and 4th columns is mutually exchanged and after every column change the process of cross multiplication is repeated by writing down the first three line below the fourth line . It is indicated by the direct proof method that all aggregates of quadruple multiplications obtained are equal to $det(A)$ value which is calculated with Laplace expansion.